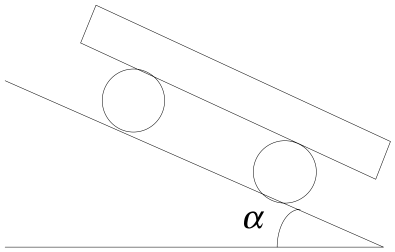
-EXERCICE 17.9-

• <u>ENONCE</u> :

« Accélération d'un plateau sur deux cylindres »



Un système est constitué de deux rouleaux cylindriques (masse m, rayon R) sur lesquels est posé un plateau de masse M.
Les forces de frottement sont telles qu'il y a **roulement sans glissement** des rouleaux sur le plan incliné et par rapport au plateau .
A l'instant initial, la vitesse des différents éléments du système est nulle dans le référentiel d'étude lié au plan incliné .

• **<u>Question</u>** : déterminer l'accélération du plateau.

• <u>On donne</u> : moment d'inertie des rouleaux par rapport à un axe passant par leur centre de masse G :

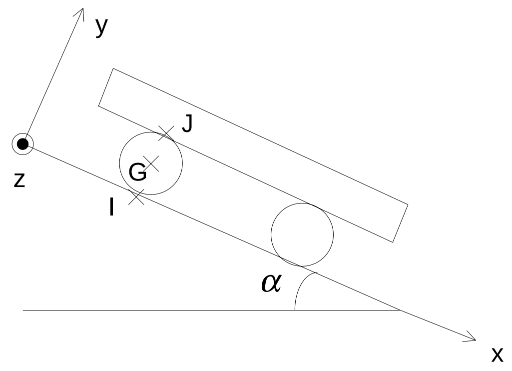
$$\boxed{J_G = \frac{1}{2} mR^2}$$

• <u>CORRIGE</u> :

«Accélération d'un plateau sur deux cylindres »

• A priori, le système possède 5 degrés de liberté : la translation du plateau (de vitesse notée $\vec{v}_P = v_P \vec{e}_x$) selon l'axe Ox ; la translation des 2 rouleaux selon l'axe Ox ; la rotation des 2 rouleaux autour de l'axe Oz (voir figure ci-dessous) : nous allons réduire ce nombre de degrés de liberté.

• Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Appliquons les relations de roulement sans glissement aux points de contact entre un rouleau et le plateau d'une part, et entre un rouleau et le plan incliné d'autre part. Désignons par (R) un rouleau, par (P) le plateau et par (S) le plan incliné; enfin, les vitesses seront exprimées dans le référentiel lié au plan incliné; on a donc:

♦ au point I : $\vec{v}_{I_1 \in (S)} = \vec{0} = \vec{v}_{I_2 \in (R)} = \vec{v}_G + \overrightarrow{IG} \wedge \vec{\omega} = v_G \vec{e}_x + R\omega \times \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = (v_G + R\omega)\vec{e}_x$

♦ au point J : $\vec{v}_{J_2 \in (R)} = \vec{v}_{J_1 \in (P)} = \vec{v}_P = \vec{v}_G + \overrightarrow{JG} \wedge \vec{\omega} = v_G \vec{e}_x + R\omega \times (-\vec{e}_y) \wedge \vec{e}_z = (v_G - R\omega)\vec{e}_x \;\Rightarrow$

$$\boxed{v_G = -R\omega = \frac{v_P}{2}}$$

Rq : des relations analogues appliquées au deuxième rouleau conduisent à des expressions identiques ⇒ la vitesse « unique » du plateau en translation (et le roulement sans glissement) impose l'égalité des vitesses de translation des rouleaux, ainsi que celle de leurs vitesses de rotation ⇒ il n'y a plus **qu'un seul degré de liberté** ⇒ on va appliquer le théorème de la puissance cinétique.

• Le théorème de König fournit l'énergie cinétique des rouleaux, soit :

$$E_C(\text{rouleaux}) = 2\times\left(\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\right) = 2\times\left(\frac{1}{2}m\times\frac{v_P^2}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}mR^2\times\frac{v_P^2}{4R^2}\right) = \frac{3}{8}mv_P^2$$

Ceci conduit à l'énergie cinétique totale : $\boxed{E_C = \frac{1}{2}Mv_P^2 + \frac{3}{8}mv_P^2 = \left(\frac{M}{2} + \frac{3m}{8}\right)v_P^2} \;\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dE_C}{dt} = \left(M + \frac{3m}{4}\right)v_P \times \frac{dv_P}{dt} = \left(M + \frac{3m}{4}\right)v_P \times a_P}$$

• Dans le cas du roulement sans glissement, on sait que la puissance **totale** des actions de contact est **nulle** (quel que soit le référentiel) ⇒ les seules forces qui travaillent ici sont les poids ; on en déduit la puissance de ces forces de pesanteur :

MECANIQUE DU SOLIDE

EXERCICE D' ORAL

$$\boxed{P = 2m\vec{g}\cdot\vec{v}_G + M\vec{g}\cdot\vec{v}_P = 2mg\sin\alpha\times\frac{v_P}{2} + Mg\sin\alpha\times v_P = (m+M)g\sin\alpha\times v_P}$$

• Le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{dE_C}{dt} = P \;\Rightarrow\; \left(M + \frac{3m}{4}\right)v_P\times a_P = (m+M)g\sin\alpha\times v_P \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_P = \frac{m+M}{\frac{3}{4}m+M}\times g\sin\alpha}$$